

Simmetria e Teoria dei Gruppi nella Composizione Musicale

Studio delle trasformazioni (trasposizione, inversione, retrogradazione) come elementi del gruppo diedrale applicati da Bach a Schönberg

La matematica nascosta nella musica

La relazione profonda tra matematica e musica costituisce uno dei legami interdisciplinari più affascinanti e produttivi nella storia del pensiero umano. Fin dall'antichità, con le scoperte pitagoriche sui rapporti numerici che governano gli intervalli consonanti, si è compreso che la struttura del suono musicale non è arbitraria, ma risponde a leggi matematiche precise. Tuttavia, è soltanto nel ventesimo secolo che la teoria matematica dei gruppi ha fornito un linguaggio formale straordinariamente potente per descrivere, analizzare e comprendere le operazioni trasformazionali che stanno al cuore della composizione musicale occidentale.

Ci proponiamo di indagare come le operazioni di trasposizione, inversione e retrogradazione, che costituiscono gli elementi fondamentali del gruppo diedrale quando applicato all'universo musicale, abbiano plasmato la composizione musicale attraverso secoli di evoluzione stilistica, dalla straordinaria architettura contrappuntistica di Johann Sebastian Bach fino alle rivoluzionarie tecniche seriali di Arnold Schönberg. Questa indagine non si limiterà a identificare mere analogie superficiali tra strutture matematiche e musicali, ma dimostrerà come i compositori, spesso in modo intuitivo e altre volte con piena consapevolezza teorica, abbiano utilizzato queste trasformazioni come strumenti compositivi essenziali per generare coerenza formale, varietà espressiva e unità organica nelle loro opere.

La teoria dei gruppi: un framework matematico per le trasformazioni musicali

Per comprendere appieno l'applicazione della teoria dei gruppi alla musica, è necessario stabilire con precisione i concetti matematici fondamentali. In matematica, un gruppo è una struttura algebrica costituita da un insieme G e da una operazione binaria che soddisfa quattro assiomi fondamentali: la chiusura, l'associatività, l'esistenza di un elemento identità e l'esistenza di un elemento inverso per ogni elemento del gruppo.

Nel contesto musicale, l'insieme G può essere costituito dalle dodici classi di altezza della scala cromatica temperata, che possiamo rappresentare con i numeri interi modulo dodici, ovvero $Z_{12} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, dove lo zero rappresenta convenzionalmente il Do, l'uno il Do diesis, il due il Re, e così via. L'operazione binaria più naturale definita su

questo insieme è l'addizione modulo dodici, che corrisponde musicalmente all'operazione di trasposizione.

La struttura di gruppo $(Z_{12}, +)$ soddisfa infatti tutti gli assiomi richiesti. La chiusura è garantita dal fatto che la somma di due classi di altezza, ridotta modulo dodici, produce sempre un'altra classe di altezza appartenente all'insieme. L'associatività dell'addizione assicura che, date tre classi di altezza a , b e c , vale sempre la relazione $(a + b) + c = a + (b + c)$. L'elemento identità è rappresentato dallo zero, poiché per ogni classe di altezza a , si ha $a + 0 = 0 + a = a$, il che significa musicalmente che trasporre una nota di zero semitoni la lascia invariata. Infine, ogni elemento a possiede un inverso, che è l'elemento $(12 - a)$ modulo dodici, poiché $a + (12 - a) = 0 \pmod{12}$, corrispondente musicalmente alla trasposizione che riporta una nota alla sua altezza originale.

Tuttavia, per descrivere l'intero spettro delle trasformazioni musicali utilizzate dai compositori, la sola trasposizione non è sufficiente. È necessario introdurre anche l'operazione di inversione, che riflette gli intervalli rispetto a un asse di simmetria. Matematicamente, l'inversione di una classe di altezza a rispetto a un asse n è definita come $I_n(a) = n - a \pmod{12}$. Quando combiniamo le trasposizioni e le inversioni, otteniamo un gruppo più complesso e ricco di struttura: il gruppo diedrale D_{12} .

Il gruppo diedrale e le sue manifestazioni musicali

Il gruppo diedrale D_{12} , che descrive le simmetrie di un poligono regolare a dodici lati, contiene ventiquattro elementi: dodici trasposizioni $T_0, T_1, T_2, \dots, T_{11}$ e dodici inversioni $I_0, I_1, I_2, \dots, I_{11}$. La trasposizione T_n sposta ogni classe di altezza di n semitoni verso l'alto, ovvero $T_n(a) = a + n \pmod{12}$, mentre l'inversione I_n riflette le classi di altezza rispetto all'asse che passa per $n/2$, secondo la formula $I_n(a) = n - a \pmod{12}$.

Le proprietà strutturali del gruppo diedrale sono particolarmente rilevanti per l'analisi musicale. Le trasposizioni formano un sottogruppo normale di D_{12} , isomorfo al gruppo ciclico Z_{12} . Le inversioni, invece, non formano un sottogruppo, poiché la composizione di due inversioni produce una trasposizione. Questa relazione è espressa dalla formula $I_m \circ I_n = T_{(m-n)}$, dove $\circ$ denota la composizione di operazioni. Reciprocamente, una trasposizione può essere ottenuta come composizione di due inversioni opportunamente scelte.

Un aspetto fondamentale del gruppo diedrale applicato alla musica riguarda i suoi sottogruppi e le loro interpretazioni musicali. I sottogruppi di D_{12} corrispondono a collezioni di trasformazioni che preservano determinate strutture musicali. Per esempio, il sottogruppo generato da T_4 (trasposizione di terza maggiore) contiene gli elementi $\{T_0, T_4, T_8\}$, che corrispondono alla divisione dell'ottava in tre parti uguali, fondamentale per comprendere la simmetria della scala esatonale e degli accordi aumentati.

La relazione tra inversione e retrogradazione merita una discussione approfondita. Mentre l'inversione opera sull'asse verticale delle altezze, riflettendo gli intervalli melodici, la retrogradazione opera sull'asse orizzontale del tempo, invertendo l'ordine delle note in una sequenza melodica. Matematicamente, se rappresentiamo una melodia come una successione ordinata di classi di altezza $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$, la retrogradazione R produce la successione $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1)$. La retrogradazione, considerata come operazione su

sequenze, ha proprietà di gruppo: applicata due volte restituisce la sequenza originale, quindi $R \circ R = \text{identità}$, e esiste sempre un'operazione inversa (che coincide con se stessa).

Quando combiniamo retrogradazione con inversione, otteniamo l'operazione di inversione retrograda, spesso indicata con RI. Dato un asse di inversione n , l'inversione retrograda RI_ n applicata a una melodia ($a_1, a_2, \dots, a_n$) produce la successione ($n - a_n, n - a_{n-1}, \dots, n - a_2, n - a_1$). Questa operazione è particolarmente significativa nella musica seriale del ventesimo secolo, dove costituisce una delle quattro forme fondamentali di una serie dodecafonica insieme alla forma originale (O), alla retrogradazione (R) e all'inversione (I).

Invarianza e simmetria: concetti chiave per l'analisi musicale

Un concetto matematico di cruciale importanza per l'analisi musicale è quello di invarianza sotto trasformazione. Un insieme di classi di altezza S è invariante sotto una trasformazione f se $f(S) = S$, ovvero se applicando la trasformazione all'insieme otteniamo lo stesso insieme. Le strutture musicali invarianti sotto particolari trasformazioni possiedono proprietà di simmetria che i compositori hanno sfruttato per creare effetti espressivi e architettonici particolari.

Consideriamo alcuni esempi fondamentali. La scala cromatica completa, contenente tutte e dodici le classi di altezza, è invariante sotto qualsiasi trasposizione, poiché trasporre l'intera scala cromatica di qualsiasi intervallo produce nuovamente la scala cromatica completa. Analogamente, è invariante anche sotto qualsiasi inversione. Questa proprietà di massima simmetria riflette la completezza e l'eshaustività della scala cromatica come materiale compositivo.

La scala esatonale, costituita da sei note equidistanti $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, presenta proprietà di simmetria notevoli. È invariante sotto le trasposizioni $T_2, T_4, T_6, T_8, T_{10}$ (trasposizioni per tono intero), che formano un sottogruppo di ordine sei all'interno del gruppo delle trasposizioni. Inoltre, è invariante sotto particolari inversioni, specificatamente quelle con assi che passano attraverso note della scala stessa o attraverso i punti medi tra note adiacenti della scala. Questa simmetria elevata conferisce alla scala esatonale un carattere sonoro particolare, che ha affascinato compositori come Claude Debussy, Maurice Ravel e Béla Bartók.

L'accordo di settima diminuita $\{0, 3, 6, 9\}$ rappresenta un altro esempio paradigmatico di struttura altamente simmetrica. Questo insieme è invariante sotto le trasposizioni T_3, T_6, T_9 (trasposizioni di terza minore), formando un sottogruppo di ordine quattro. Di conseguenza, esistono soltanto tre accordi di settima diminuita distinti nella scala cromatica, una proprietà che i compositori del periodo romantico, in particolare Franz Schubert, Robert Schumann e Richard Wagner, hanno utilizzato ampiamente per le sue potenzialità modulatorie.

La triade aumentata $\{0, 4, 8\}$ manifesta simmetria ancora più pronunciata, essendo invariante sotto le trasposizioni T_4 e T_8 , il che significa che esistono soltanto quattro triadi aumentate distinte. Questa simmetria conferisce all'accordo aumentato un carattere ambiguo e instabile, caratteristiche che i compositori tardoromantici hanno sfruttato per creare tensione armonica e per effettuare modulazioni enharmoniche sorprendenti.

Le classi di equivalenza e la riduzione dello spazio musicale

Un concetto fondamentale derivante dalla teoria dei gruppi è quello di classe di equivalenza. Due insiemi di classi di altezza appartengono alla stessa classe di equivalenza rispetto a un gruppo di trasformazioni G se esiste una trasformazione in G che mappa un insieme nell'altro. Questa nozione permette di classificare le strutture musicali in categorie che condividono proprietà essenziali, astraendo dalle differenze superficiali di altezza assoluta o di orientamento melodico.

Nel contesto della teoria degli insiemi applicata alla musica atonale, sviluppata principalmente da Allen Forte negli anni Sessanta e Settanta del Novecento, le classi di equivalenza sotto trasposizione e inversione (chiamate classi di insiemi o set-class) costituiscono il fondamento della classificazione sistematica delle collezioni di altezze. Due insiemi che possono essere mappati l'uno nell'altro mediante trasposizione o inversione sono considerati manifestazioni differenti della stessa struttura intervallare fondamentale e vengono identificati con lo stesso numero Forte.

Per esempio, gli insiemi $\{0, 1, 4\}$ (Do, Do diesis, Mi) e $\{0, 3, 4\}$ (Do, Mi bemolle, Mi) appartengono alla stessa classe di equivalenza, identificata come 3-3 nella nomenclatura di Forte, poiché il secondo può essere ottenuto dal primo mediante l'inversione I_4 . Analogamente, $\{2, 3, 6\}$ (Re, Re diesis, Fa diesis) appartiene alla stessa classe, essendo una trasposizione T_2 del primo insieme. Questa classificazione permette di identificare relazioni strutturali profonde tra materiali apparentemente diversi utilizzati in una composizione.

La cardinalità della classe di equivalenza di un insieme dipende dalle sue proprietà di simmetria. Un insieme generico senza simmetrie particolari avrà ventiquattro forme distinte (dodici trasposizioni e dodici inversioni), corrispondenti all'ordine del gruppo diedrale D_{12} . Tuttavia, insiemi con simmetrie interne avranno meno forme distinte. Per esempio, la scala esatonale ha soltanto due forme distinte, poiché le sue simmetrie riducono drasticamente il numero di versioni non equivalenti.

La forma normale e la forma prima: rappresentazioni canoniche

Per poter lavorare efficacemente con le classi di equivalenza, è necessario stabilire una rappresentazione canonica per ciascuna classe. La teoria musicale post-tonale ha sviluppato due convenzioni standard: la forma normale (normal form) e la forma prima (prime form).

La forma normale di un insieme è la sua versione più compatta quando le note sono ordinate in senso ascendente e disposte nell'ambito più ristretto possibile. Per determinare la forma normale, si considerano tutte le rotazioni cicliche dell'insieme ordinato e si sceglie quella che occupa l'intervallo più piccolo. Se esistono più rotazioni con lo stesso intervallo minimo, si applicano criteri di desempate basati sugli intervalli tra note successive, privilegiando le configurazioni con intervalli piccoli concentrati all'inizio.

La forma prima si ottiene dalla forma normale applicando eventualmente una trasposizione che porta la prima nota sullo zero e, se necessario, un'inversione che produce la forma più compatta secondo criteri analoghi a quelli usati per la forma normale. La forma prima rappresenta quindi il rappresentante canonico della classe di equivalenza, permettendo di identificare immediatamente se due insiemi appartengono alla stessa classe.

Questi concetti, sebbene formalizzati nel ventesimo secolo, riflettono intuizioni compositive che risalgono a epoche molto anteriori. Quando Bach utilizza un soggetto fugale e le sue varie trasformazioni, sta implicitamente lavorando con classi di equivalenza sotto trasformazioni specifiche. La capacità di riconoscere lo stesso materiale tematico in differenti travestimenti trasformativi costituisce un aspetto fondamentale dell'ascolto musicale strutturato e della comprensione formale.

Le operazioni composte e i loro gruppi

Oltre alle trasformazioni elementari di trasposizione, inversione e retrogradazione, la composizione di queste operazioni genera trasformazioni più complesse che hanno giocato ruoli importanti nella composizione musicale. La composizione di operazioni nel gruppo diedrale segue regole precise che possono essere rappresentate mediante una tavola di moltiplicazione del gruppo.

La composizione di due trasposizioni T_m e T_n produce sempre una trasposizione $T_{(m+n)}$, riflettendo il fatto che le trasposizioni formano un sottogruppo. La composizione di una trasposizione e un'inversione produce sempre un'inversione: $T_m \circ I_n = I_{(n-m)}$ e $I_n \circ T_m = I_{(n+m)}$. Come già menzionato, la composizione di due inversioni produce una trasposizione: $I_m \circ I_n = T_{(m-n)}$.

Quando introduciamo anche la retrogradazione nell'algebra delle trasformazioni, otteniamo un gruppo ancora più ricco. Se consideriamo le quattro operazioni fondamentali usate nella composizione seriale (identità, retrogradazione, inversione, inversione retrograda) e le loro composizioni con le dodici trasposizioni, otteniamo un gruppo di ordine quarantotto, che può essere interpretato come il prodotto semidiretto del gruppo ciclico Z_{12} con il gruppo di Klein $V_4 = \{e, R, I, RI\}$.

Le proprietà di questo gruppo sono cruciali per comprendere la struttura della musica seriale. Per esempio, la retrogradazione commuta con la trasposizione ($R \circ T_n = T_n \circ R$), poiché invertire l'ordine temporale di una sequenza non dipende dall'altezza assoluta delle note. Tuttavia, l'inversione e la retrogradazione non commutano in generale con l'inversione di altezza, una proprietà che genera la distinzione tra le quattro forme fondamentali della serie.

I generatori del gruppo e le relazioni intervallari

Un approccio particolarmente fruttuoso all'applicazione della teoria dei gruppi in musica consiste nell'identificare i generatori del gruppo, ovvero quegli elementi minimali dalle cui ripetute applicazioni si può ottenere l'intero gruppo. Nel gruppo delle trasposizioni Z_{12} , un generatore naturale è T_1 (trasposizione di un semitono), poiché applicando ripetutamente questa operazione si ottengono tutte le altre trasposizioni: $T_2 = T_1 \circ T_1$, $T_3 = T_1 \circ T_1 \circ T_1$, e così via.

La scelta del generatore ha implicazioni musicali profonde. Generare la scala cromatica mediante trasposizioni successive di semitono enfatizza il cromatismo e la continuità. Altri generatori producono strutture differenti. Per esempio, T_7 (trasposizione di quinta giusta) genera un sottogruppo ciclico che produce la sequenza $\{0, 7, 2, 9, 4, 11, 6, 1, 8, 3, 10, 5\}$, corrispondente al circolo delle quinte, fondamentale per l'armonia tonale tradizionale.

La generazione mediante T_5 (trasposizione di quarta giusta) produce la stessa sequenza in ordine inverso, riflettendo la dualità tra quarte e quinte come intervalli complementari. La generazione mediante T_2 (trasposizione di tono intero) produce due cicli disgiunti, corrispondenti alle due scale esatonali, mentre T_3 (terza minore) genera quattro cicli, corrispondenti ai quattro accordi di settima diminuita.

Questi cicli di generazione sono stati utilizzati consapevolmente o intuitivamente dai compositori per organizzare il materiale musicale. La progressione armonica per circolo delle quinte, onnipresente nella musica tonale, riflette esattamente la struttura del gruppo ciclico generato da T_7 . Le sequenze modulanti che esplorano tonalità distanti mediante terze (maggiori o minori) sfruttano i sottogruppi generati da T_4 o T_3 .

L'interpretazione geometrica: il Tonnetz e gli spazi trasformatzionali

Una rappresentazione geometrica particolarmente illuminante delle relazioni trasformatzionali in musica è fornita dal Tonnetz (reticolo tonale), una costruzione che risale al teorico musicale del diciannovesimo secolo Hugo Riemann, ma che è stata rivitalizzata e generalizzata nella teoria trasformatzionale contemporanea, particolarmente nel lavoro di David Lewin e dei suoi successori.

Il Tonnetz tradizionale rappresenta le classi di altezza come nodi di un reticolo bidimensionale dove gli assi corrispondono a relazioni intervallari specifiche, tipicamente la quinta giusta e la terza maggiore. In questo reticolo, le triadi maggiori e minori appaiono come triangoli, e le trasformazioni armoniche fondamentali della musica tonale (come la relazione di medianta, di dominante, di sottodominante) corrispondono a movimenti specifici nel reticolo.

Le operazioni del gruppo diedrale possono essere interpretate come isometrie (trasformazioni che preservano le distanze) di questo spazio. Le trasposizioni corrispondono a traslazioni nel reticolo, mentre le inversioni corrispondono a riflessioni rispetto ad assi di simmetria. Questa interpretazione geometrica permette di visualizzare le relazioni strutturali tra accordi e progressioni armoniche in modo intuitivo e di comprendere le proprietà di simmetria che caratterizzano particolari strutture musicali.

Generalizzazioni del Tonnetz a dimensioni superiori permettono di rappresentare relazioni più complesse, includendo accordi di settima, accordi di nona, e strutture post-tonali. Questi spazi geometrici multidimensionali forniscono un framework unificato per comprendere come differenti sistemi compositivi (tonale, modale, atonale, seriale) organizzino le relazioni tra altezze mediante differenti gruppi di trasformazioni e differenti metriche di vicinanza.

Le distanze tra insiemi e le metriche trasformatzionali

Un aspetto avanzato della teoria trasformatzionale riguarda la definizione di metriche che quantificano la "distanza" tra strutture musicali. Una metrica particolarmente utile è la distanza minima di trasformazione, definita come il numero minimo di trasformazioni elementari necessarie per trasformare un insieme in un altro.

Nel contesto del gruppo diedrale D_{12} , due insiemi che appartengono alla stessa classe di equivalenza hanno distanza zero. Insiemi che differiscono per una singola trasposizione o

inversione hanno distanza uno. La distanza massima tra due insiemi di uguale cardinalità è limitata e dipende dalle proprietà strutturali degli insiemi coinvolti.

Un'altra metrica importante è la distanza voice-leading, che misura il movimento totale delle voci quando si passa da un accordo a un altro. Matematicamente, data una mappatura tra le note del primo accordo e le note del secondo accordo, la distanza voice-leading è la somma dei movimenti individuali (misurati in semitoni) di ciascuna voce. La distanza minima voice-leading si ottiene considerando tutte le possibili mappature e scegliendo quella che minimizza il movimento totale.

Questa metrica è particolarmente rilevante per comprendere le progressioni armoniche nella musica tonale e post-tonale. Dmitri Tymoczko e altri teorici hanno dimostrato che molte progressioni caratteristiche della musica classica e romantica sfruttano relazioni di voice-leading parsimoniose, dove gli accordi sono connessi mediante movimenti minimi delle singole voci. Questa efficienza nel voice-leading può essere interpretata come una forma di economia compositiva che riflette principi percettivi e cognitivi.

Johann Sebastian Bach e l'architettura delle trasformazioni

Bach e la simmetria come principio compositivo

Johann Sebastian Bach, vissuto tra il 1685 e il 1750, rappresenta un punto culminante nella storia della musica contrappuntistica occidentale. La sua opera manifesta una comprensione profonda e sistematica delle possibilità trasformazionali del materiale musicale, anche se il compositore non disponeva del linguaggio matematico formale della teoria dei gruppi che sarebbe stato sviluppato soltanto nel diciannovesimo secolo. Tuttavia, l'intuizione musicale di Bach lo portò a esplorare con straordinaria completezza le operazioni di trasposizione, inversione, retrogradazione e le loro combinazioni, incorporandole come elementi strutturali fondamentali delle sue composizioni più ambiziose.

L'approccio di Bach alle trasformazioni musicali non era puramente astratto o matematico, ma intimamente legato alla tradizione contrappuntistica e alla pratica dell'imitazione canonica che aveva raggiunto un alto grado di sofisticazione nella musica rinascimentale e barocca. Il canone, forma musicale in cui una melodia è imitata da una o più voci con un ritardo temporale, costituisce una manifestazione diretta del principio di trasformazione. Quando l'imitazione canonica avviene a un'altezza diversa, viene applicata una trasposizione. Quando la melodia è imitata in movimento contrario, viene applicata un'inversione. Quando la melodia procede all'indietro, viene applicata una retrogradazione.

Bach portò queste tecniche a livelli di complessità e integrazione strutturale senza precedenti. Nelle sue opere più elaborate, specialmente nell'Arte della Fuga, nell'Offerta Musicale, nelle Variazioni Goldberg, e in numerose fughe del Clavicembalo Ben Temperato, le trasformazioni non sono semplici artifici tecnici, ma costituiscono il principio generativo che produce l'intera architettura compositiva. La simmetria diventa quindi non un ornamento superficiale, ma l'essenza stessa della struttura musicale.

L'Arte della Fuga: un compendio delle trasformazioni simmetriche

L'Arte della Fuga (Die Kunst der Fuge, BWV 1080), raccolta incompiuta probabilmente composta negli ultimi anni della vita di Bach, rappresenta forse l'esplorazione più sistematica e completa delle possibilità contrappuntistiche e trasformativazionali basate su un singolo soggetto musicale. L'opera consiste in quattordici fughe (chiamate Contrapunctus) e quattro canoni, tutte basate sullo stesso soggetto principale, una semplice melodia in Re minore che discende per grado congiunto e poi risale.

Il soggetto principale dell'Arte della Fuga può essere rappresentato in termini di classi di intervallo come la successione di intervalli: 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, dove i numeri positivi indicano movimenti ascendenti per semitoni. Questa struttura intervallare relativamente semplice possiede proprietà che la rendono particolarmente adatta all'elaborazione trasformativazionale. Non è palindroma (quindi la sua retrogradazione produce una melodia chiaramente distinta), non possiede simmetrie interne evidenti, ma ha una direzione melodica chiara e una identità riconoscibile che permane attraverso le trasformazioni.

Nel Contrapunctus III, Bach introduce sistematicamente l'inversione del soggetto. L'inversione è qui concepita in senso diatonico, ovvero preservando la modalità della tonalità d'impianto piuttosto che invertendo esattamente ogni intervallo cromatico. Questo tipo di inversione tonale, comune nella pratica barocca, produce risultati musicalmente più coerenti con il contesto armonico rispetto all'inversione cromatica rigorosa che sarebbe diventata standard nella musica del ventesimo secolo. L'inversione tonale del soggetto mantiene le relazioni scala-grado, trasformando secondi ascendenti in secondi discendenti, terze in terze, e così via, ma adattando la qualità degli intervalli (maggiore/minore) per conformarsi alla scala.

Il Contrapunctus VI introduce la diminuzione del soggetto, dove i valori ritmici sono dimezzati, creando una versione più rapida del tema. Sebbene la diminuzione non sia una trasformazione del gruppo diedrale applicato alle altezze, essa rappresenta un'analoga trasformazione nel dominio ritmico, moltiplicando tutti i valori di durata per un fattore costante (in questo caso 0,5). La combinazione di soggetto in valori normali, in aumentazione (valori raddoppiati) e in diminuzione crea una texture contrappuntistica ricchissima dove lo stesso materiale intervallare appare a diverse scale temporali.

Il Contrapunctus XII rappresenta un vertice di complessità trasformativazionale. Si tratta di una fuga a quattro voci dove il soggetto appare in forma originale, in inversione, e anche in retrogradazione. Bach costruisce un intreccio contrappuntistico dove queste diverse forme del soggetto si combinano simultaneamente, dimostrando non solo che sono compatibili armonicamente, ma che possono generare una struttura musicale coerente e espressiva. Questo richiede una pianificazione compositiva estremamente sofisticata, poiché ogni nota del soggetto deve funzionare armonicamente non solo nel suo contesto lineare originale, ma anche quando viene ribaltata verticalmente attraverso l'inversione o temporalmente attraverso la retrogradazione.

Il Contrapunctus XIII è una doppia fuga che incorpora sia il soggetto principale in forma diretta che in inversione come soggetti distinti ma correlati. La costruzione si basa sul principio del contrappunto doppio all'ottava, una tecnica dove due linee melodiche sono scritte in modo tale da poter essere scambiate di registro (la voce superiore diventa inferiore e viceversa) mantenendo relazioni consonanti. Questa tecnica, sebbene distinta dalle

trasformazioni del gruppo diedrale, condivide con esse l'idea di invarianza strutturale sotto trasformazione.

Il culmine teorico dell'Arte della Fuga è rappresentato dal Contrapunctus XIV, l'ultima fuga incompiuta che Bach stava componendo al momento della morte. Questa straordinaria costruzione è una tripla fuga che incorpora tre soggetti distinti, l'ultimo dei quali è basato sul nome BACH trascritto secondo la notazione tedesca (Sib, La, Do, Si naturale). La fuga interrompe bruscamente dopo l'esposizione dei tre soggetti, ma gli studiosi hanno ricostruito l'intenzione di Bach di combinare tutti e tre i soggetti con il soggetto principale dell'intera raccolta in una sintesi contrappuntistica di complessità senza precedenti.

I canoni dell'Arte della Fuga: simmetria allo stato puro

Oltre alle fughe, l'Arte della Fuga include quattro canoni che esplorano diverse configurazioni simmetriche. Il Canone alla Decima in Contrapunto alla Terza è un canone all'inversione dove la voce imitante procede in movimento contrario alla voce guida, mantenendo sempre l'intervallo di decima tra le due voci. Questa costruzione richiede che il materiale melodico sia costruito in modo tale che ogni intervallo ascendente nella voce guida produca un intervallo discendente corrispondente nella voce imitante che risulti consonante.

Dal punto di vista della teoria dei gruppi, questo canone realizza la composizione di una trasposizione (l'intervallo di decima che separa le due voci) con un'inversione. Se denotiamo con I l'operazione di inversione e con T_{10} la trasposizione di dieci semitoni (una settimana maggiore, equivalente alla decima composta ridotta all'interno dell'ottava), il canone realizza la trasformazione $I \circ T_{10}$ applicata continuamente al materiale melodico mentre questo si dispiega nel tempo.

Il Canone alla Duodecima in Contrapunto alla Quinta rappresenta un'altra configurazione, dove l'intervallo canonico è di dodicesima (equivalente alla quinta composta) e le voci procedono in movimento retto (non invertito). Questo canone realizza quindi una pura trasposizione T_{19} (diciannove semitoni, corrispondenti a un'ottava più una quinta giusta), ridotta modulo dodici a T_7 . La scelta della quinta come intervallo canonico non è casuale: la quinta giusta, come intervallo generatore del circolo delle quinte, ha un ruolo strutturale fondamentale nell'armonia tonale.

Il Canone all'Ottava è particolarmente interessante dal punto di vista simmetrico. Le due voci, separate da un'ottava, procedono in movimento retto, ma a un certo punto la voce superiore diventa inferiore e viceversa, creando un chiasmo strutturale. Questo scambio di voci realizza una simmetria temporale nella forma complessiva del canone, creando una struttura A-B-B'-A' dove B' è ottenuto da B mediante uno scambio di registro.

Il quarto canone, per aumentazione e movimento contrario, rappresenta forse la costruzione più complessa. La voce imitante procede in movimento contrario rispetto alla voce guida (realizzando un'inversione) e simultaneamente in valori raddoppiati (aumentazione ritmica). Questo canone combina quindi trasformazioni nel dominio delle altezze (inversione) con trasformazioni nel dominio ritmico (moltiplicazione dei valori), creando una texture dove lo stesso materiale appare a diverse scale temporali e con diverse direzioni melodiche.

Il Clavicembalo Ben Temperato: esplorare le ventiquattro tonalità

Il Clavicembalo Ben Temperato (Das Wohltemperierte Klavier) consiste in due raccolte di ventiquattro preludi e fughe ciascuna, coprendo tutte le ventiquattro tonalità maggiori e minori. Questa organizzazione sistematica riflette implicitamente la struttura del gruppo delle trasposizioni Z_{12} e la sua azione sulle modalità maggiore e minore. Ogni tonalità è ottenuta dalle altre mediante trasposizioni, e l'esplorazione completa dello spazio delle tonalità costituisce una dimostrazione pratica dell'azione del gruppo delle trasposizioni sulla musica tonale.

All'interno di molte fughe del Clavicembalo Ben Temperato, Bach utilizza sistematicamente inversioni e altre trasformazioni del soggetto. La Fuga in Do diesis minore dal primo libro (BWV 849) presenta il soggetto in inversione già nella seconda esposizione, creando un contrasto immediato tra la forma diretta e la forma inversa del materiale tematico. L'inversione è qui tonale, adattata alla tonalità d'impianto, ma l'effetto è quello di riflettere il profilo melodico del soggetto.

La Fuga in Mi bemolle minore dal primo libro (BWV 853) è particolarmente notevole per la sua struttura simmetrica. Il soggetto stesso possiede una forma che si presta bene all'inversione, e Bach sfrutta questa proprietà costruendo una fuga dove soggetto e inversione si alternano e si combinano continuamente. La progressione armonica della fuga esplora tonalità correlate mediante relazioni di terza, un'organizzazione tonale che riflette la struttura dei sottogruppi del gruppo diedrale generati da trasposizioni di terza maggiore o minore.

La Fuga in Si bemolle maggiore dal secondo libro (BWV 890) è costruita su un soggetto che presenta una simmetria quasi perfetta. Analizzando la struttura intervallare, si nota che la prima metà del soggetto e la seconda metà sono approssimativamente retrograde inverse l'una dell'altra. Questa proprietà conferisce al soggetto una qualità palindroma che Bach sfrutta nella costruzione di episodi dove il materiale viene presentato sia in forma diretta che retrograda.

L'Offerta Musicale: variazioni su un tema regale

L'Offerta Musicale (Musikalisches Opfer, BWV 1079) fu composta da Bach nel 1747 in risposta a un tema musicale propostogli da Federico II di Prussia. L'opera è una raccolta di elaborazioni contrappuntistiche del tema regale, includendo due ricercari, dieci canoni e una sonata a trio. I canoni in particolare esplorano sistematicamente diverse configurazioni trasformazionali.

Il Canon perpetuus super Thema Regium è un canone circolare dove la fine coincide con l'inizio, permettendo una ripetizione perpetua. La struttura circolare riflette la natura ciclica del gruppo delle trasposizioni: dopo dodici trasposizioni successive di un semitono, si ritorna alla tonalità originale. Il canone è costruito in modo tale che la modulazione armonica compia un ciclo completo, tornando alla tonalità di partenza esattamente quando il materiale melodico si ricongiunge con l'inizio.

Il Canon a 2 per motum contrarium presenta il tema regale in movimento contrario, realizzando un'inversione del materiale originale. Bach dimostra che il tema di Federico, nonostante non sia stato composto con l'inversione in mente, si presta comunque a questa trasformazione producendo risultati musicalmente coerenti. Questo richiede un adattamento

armonico accurato, poiché l'inversione meccanica di ogni intervallo potrebbe produrre dissonanze inaccettabili.

Il Canon a 2 per tonos (Canone ascendente) rappresenta una delle costruzioni più ingegnose. Si tratta di un canone modulante che sale di un tono a ogni ripetizione. Dopo sei ripetizioni, il canone ha attraversato l'intera scala esatonale $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ (in termini di classi di altezza), arrivando a un tritono di distanza dalla tonalità originale. Se continuato ulteriormente per altre sei ripetizioni, il canone ritornerebbe alla tonalità di partenza, avendo completato un ciclo attraverso tutte le dodici tonalità.

Questa costruzione realizza musicalmente il sottogruppo ciclico generato dalla trasposizione T_2 . La progressione modulante segue la sequenza: Do minore $\rightarrow$ Re minore $\rightarrow$ Mi minore $\rightarrow$ Fa diesis minore $\rightarrow$ Sol diesis minore $\rightarrow$ La diesis minore, dove ogni tonalità è separata dalla precedente da un tono intero. La struttura riflette la divisione dell'ottava in due scale esatonali disgiunte, una proprietà fondamentale della simmetria cromatica.

Le Variazioni Goldberg: simmetria nella macrostruttura

Le Variazioni Goldberg (BWV 988) rappresentano un vertice dell'arte della variazione barocca. L'opera consiste in un'aria iniziale seguita da trenta variazioni e dalla ripetizione dell'aria. La struttura complessiva manifesta diverse forme di simmetria e organizzazione sistematica.

Una caratteristica notevole è l'organizzazione delle variazioni a gruppi di tre: ogni terza variazione è un canone, e i canoni procedono sistematicamente attraverso gli intervalli dall'unisono alla nona. La Variazione 3 è un canone all'unisono (T_0), la Variazione 6 è un canone alla seconda (T_2), la Variazione 9 è un canone alla terza (T_4 o T_3 a seconda che la terza sia maggiore o minore), e così via fino alla Variazione 27, che è un canone alla nona (T_{14} , equivalente a T_2 nell'ottava superiore).

Questa progressione sistematica attraverso gli intervalli canonici riflette implicitamente un'esplorazione del gruppo delle trasposizioni. Bach dimostra che il basso dell'aria (la struttura armonica fondamentale che rimane invariante attraverso tutte le variazioni) può supportare canoni a qualsiasi intervallo, illustrando la ricchezza armonica della progressione di basso scelta.

La simmetria si manifesta anche nella struttura della raccolta complessiva. La Variazione 16, esattamente a metà della raccolta (escludendo la ripetizione finale dell'aria), ha un carattere particolarmente espressivo e introduce un cambiamento di modo (dal maggiore al minore), creando un punto di articolazione strutturale che divide l'opera in due metà. La ripetizione finale dell'aria crea una struttura ad arco A-B-A' dove A' è identico ad A, realizzando una simmetria perfetta sulla scala dell'intera composizione.

Alcune variazioni esplorano inversioni e retrogradazioni del materiale tematico in modo più locale. La Variazione 15, ad esempio, presenta nel registro acuto un motivo melodico che viene poi invertito nel registro grave, creando una simmetria speculare verticale all'interno della singola variazione. Questo tipo di simmetria locale contribuisce alla ricchezza architettonica dell'opera senza compromettere l'unità garantita dalla persistenza della struttura armonica fondamentale.

Il contrappunto invertibile e le sue implicazioni trasformativazionali

Una tecnica fondamentale utilizzata sistematicamente da Bach è il contrappunto invertibile (o rivoltabile), dove due o più linee melodiche sono scritte in modo tale da poter essere scambiate di registro mantenendo relazioni consonanti. Il contrappunto doppio all'ottava permette lo scambio delle voci nell'ambito di un'ottava, il contrappunto doppio alla decima permette lo scambio nell'ambito di una decima, e così via.

Matematicamente, il contrappunto invertibile può essere analizzato in termini di trasformazioni che combinano trasposizioni e inversioni. Quando due voci scritte in contrappunto doppio all'ottava vengono scambiate, ogni intervallo armonico x (misurato in semitoni) viene trasformato nell'intervallo $12 - x$ (modulo 12). Questo significa che una terza maggiore (quattro semitoni) diventa una sesta minore (otto semitoni), una quinta giusta (sette semitoni) diventa una quarta giusta (cinque semitoni), e così via.

Bach utilizzava il contrappunto invertibile non come mero artificio tecnico, ma come principio strutturale per generare varietà a partire dallo stesso materiale. Nelle fughe, gli episodi spesso presentano materiale precedentemente esposto ma in contrappunto invertito, creando una sensazione simultanea di familiarità e novità. Questa tecnica costituisce un'applicazione pratica del concetto di invarianza sotto trasformazione: il materiale è riconoscibile nonostante la trasformazione, ma la trasformazione produce effetti sonori sufficientemente diversi da giustificare la ripetizione.

Nella Fuga in Mi maggiore dal primo libro del Clavicembalo Ben Temperato (BWV 854), Bach costruisce l'intera struttura su combinazioni sistematiche di soggetto e controsoggetto in contrappunto doppio. Il soggetto e il controsoggetto sono concepiti fin dall'inizio per funzionare sia nella configurazione originale (soggetto sopra, controsoggetto sotto) sia nella configurazione invertita (controsoggetto sopra, soggetto sotto). Questa proprietà permette a Bach di generare una grande varietà di combinazioni contrappuntistiche pur mantenendo coerenza materiale.

La modulazione come trasposizione nel tempo

Un aspetto più sottile dell'applicazione delle trasformazioni nella musica di Bach riguarda la modulazione, ovvero il passaggio da una tonalità a un'altra nel corso di una composizione. Dal punto di vista della teoria dei gruppi, una modulazione costituisce una trasposizione applicata non istantaneamente nello spazio, ma gradualmente nel tempo.

Nelle fughe tonali, il secondo ingresso del soggetto avviene tipicamente alla dominante (quinta superiore o quarta inferiore rispetto alla tonalità d'impianto), realizzando una trasposizione T_7 o T_5 del materiale tematico. Questa trasposizione non è puramente meccanica: Bach adatta spesso leggermente il soggetto per conformarlo meglio alla nuova tonalità (fuga tonale piuttosto che fuga reale), ma il profilo intervallare generale rimane riconoscibile.

La progressione modulante tipica di una fuga barocca esplora tonalità correlate mediante relazioni di quinta (dominante, sottodominante, relativa maggiore o minore). Questa scelta non è arbitraria, ma riflette la struttura del sistema tonale maggiore-minore, dove le tonalità più strettamente correlate sono quelle separate da un intervallo di quinta. In termini di teoria

dei gruppi, le modulazioni per quinta generano il sottogruppo ciclico del gruppo delle trasposizioni generato da T_7 , corrispondente al circolo delle quinte.

Alcune fughe esplorano tonalità più remote mediante modulazioni per terza. La Fuga in Do diesis maggiore dal primo libro del Clavicembalo Ben Temperato (BWV 848) modula attraverso una sequenza di tonalità correlate per terza maggiore, esplorando il sottogruppo generato da T_4 . Questo crea progressioni armoniche più inusuali e cromatiche rispetto alle modulazioni per quinta, sfruttando le proprietà simmetriche della divisione dell'ottava in tre parti uguali.

L'estetica della simmetria in Bach

Al di là degli aspetti puramente tecnici, la simmetria in Bach ha una dimensione estetica e persino teologica. La concezione luterana di Bach vedeva nell'ordine matematico e nella simmetria manifestazioni della perfezione divina. La complessità architettonica delle sue composizioni, dove molteplici livelli di simmetria si intrecciano creando strutture di straordinaria coerenza, può essere interpretata come un riflesso musicale dell'ordine cosmico.

Il numerologia simbolica gioca un ruolo in diverse opere. Il numero quattordici, corrispondente alla somma dei valori numerici delle lettere del nome BACH (B=2, A=1, C=3, H=8), appare frequentemente nelle sue composizioni. L'Arte della Fuga contiene quattordici fughe complete. Altre opere mostrano simmetrie numerologiche elaborate che collegano aspetti formali, armonici e tematici.

Tuttavia, è importante non sopravvalutare la dimensione puramente speculativa o simbolica della simmetria in Bach. Le trasformazioni musicali servono primariamente scopi compositivi concreti: generare varietà mantenendo unità, creare contrasti, sviluppare materiale tematico, e costruire forme coerenti. La maestria di Bach consiste nell'integrare queste tecniche trasformatrici in modo tale che il risultato sonoro sia espressivamente convincente e non meramente un esercizio di virtuosismo intellettuale.

La musica di Bach dimostra che le trasformazioni simmetriche non sono fredde astrazioni matematiche, ma strumenti compositivi che, utilizzati con sensibilità artistica, possono generare musica di grande profondità emotiva e spirituale. L'inversione di un tema può trasformare il suo carattere espressivo da ascendente e aspirazionale a discendente e introspettivo. La retrogradazione può creare effetti di circolarità temporale e ricorrenza. La combinazione simultanea di diverse forme trasformate dello stesso materiale genera una tessitura contrappuntistica ricca e complessa che riflette la molteplicità nell'unità.

Dal classicismo viennese alla dissoluzione del sistema tonale

Mozart, Haydn e Beethoven: simmetria nella forma classica

Il periodo classico viennese, dominato dalle figure di Franz Joseph Haydn (1732-1809), Wolfgang Amadeus Mozart (1756-1791) e Ludwig van Beethoven (1770-1827), rappresenta un'epoca di consolidamento formale dove le strutture simmetriche operano principalmente

su scala macroscopica, nella forma-sonata e nelle altre forme strumentali classiche, piuttosto che nel trattamento contrappuntistico del materiale tematico come in Bach.

La forma-sonata classica, con la sua struttura tripartita di esposizione, sviluppo e ripresa, manifesta una simmetria su larga scala. L'esposizione presenta tipicamente due gruppi tematici in tonalità contrastanti (tonica e dominante nel modo maggiore, tonica e relativa maggiore nel modo minore). La ripresa riprende entrambi i gruppi tematici, ma ora entrambi nella tonalità di tonica, creando una risoluzione della tensione tonal stabilita nell'esposizione. Questa struttura può essere interpretata come una forma di simmetria imperfetta o simmetria modificata: A-B vs. A-B', dove B' è B trasposto nella tonalità di tonica.

Mozart, in particolare, mostrò grande interesse per le possibilità contrappuntistiche e trasformazionali, specialmente dopo il suo incontro con la musica di Bach durante il suo soggiorno viennese. Il Finale della Sinfonia n. 41 "Jupiter" (K. 551) rappresenta un capolavoro di contrappunto dove cinque motivi distinti vengono combinati simultaneamente in una fuga conclusiva. Mozart utilizza inversioni e altre trasformazioni dei motivi per generare questa straordinaria sintesi contrappuntistica.

Il Quartetto per archi in Sol maggiore K. 387, primo dei quartetti dedicati a Haydn, contiene nel movimento finale una doppia fuga dove Mozart impiega sistematicamente inversioni e contrappunto invertibile alla maniera di Bach. Il primo soggetto e il secondo soggetto sono costruiti in modo tale da poter essere invertiti sia verticalmente (mediante contrappunto doppio) sia orizzontalmente (mediante inversione melodica), generando un'ampia varietà di combinazioni contrappuntistiche.

Beethoven portò l'utilizzo delle trasformazioni tematiche a nuovi livelli di intensità e drammaticità. Nella Sonata per pianoforte n. 29 "Hammerklavier" op. 106, il movimento lento e la fuga finale mostrano un uso sistematico dell'inversione. Il soggetto della fuga appare in forma diretta, in inversione, in retrogradazione e in inversione retrograda, anticipando tecniche che sarebbero diventate centrali nella musica seriale del ventesimo secolo.

La Grande Fuga op. 133, originariamente concepita come finale del Quartetto per archi op. 130, rappresenta forse il punto di massima complessità contrappuntistica raggiunto da Beethoven. Il soggetto principale appare in numerose trasformazioni: invertito, aumentato, diminuito, e combinato con controsoggetti in contrappunto multiplo. La struttura complessiva della fuga è sorprendentemente moderna, con sezioni contrastanti che esplorano diversi caratteri espressivi del materiale tematico attraverso diverse trasformazioni.

Il cromatismo romantico e l'espansione dello spazio armonico

Il periodo romantico, grosso modo dal 1820 al 1900, vide una progressiva espansione del linguaggio armonico e un aumento del cromatismo, fenomeni che possono essere interpretati in termini di teoria dei gruppi come un'esplorazione più completa dello spazio delle classi di altezza e delle trasformazioni che le connettono.

Franz Schubert (1797-1828) fu un pioniere nell'esplorazione di relazioni armoniche basate su trasposizioni per terza, sia maggiore che minore. Nella sua musica, progressioni che passano da Do maggiore a Mi maggiore (T_4), da Do maggiore a La bemolle maggiore (T_8), o da Do maggiore a Mi bemolle maggiore (T_3) diventano caratteristiche espressive distintive.

Queste modulazioni sfruttano le proprietà simmetriche della divisione dell'ottava in parti uguali.

La modulazione da Do maggiore a Mi maggiore, ad esempio, può essere interpretata come applicazione della trasposizione T_4 del gruppo ciclico Z_{12} . Se ripetuta, questa trasposizione genera il ciclo $\{0, 4, 8\}$, corrispondente ai tre accordi maggiori della triade aumentata {Do, Mi, Sol diesis/La bemolle}. Schubert spesso esplora questa simmetria in modo intuitivo, creando progressioni che ruotano attraverso tonalità correlate per terza maggiore.

Il Quartetto per archi in Sol maggiore D. 887 di Schubert esplora sistematicamente relazioni di terza maggiore e minore. Il primo movimento modula da Sol maggiore a Si bemolle maggiore (T_3), il secondo movimento è in Mi minore (T_8 rispetto a Sol), e il terzo movimento, sebbene in Sol maggiore, contiene un trio in Si maggiore (T_4). Questa rete di relazioni tonali per terza crea una coerenza armonica che trascende le relazioni tonali tradizionali basate sul circolo delle quinte.

Robert Schumann (1810-1856) e Fryderyk Chopin (1810-1849) esplorarono ulteriormente le possibilità del cromatismo, creando progressioni armoniche che sfruttano accordi simmetrici come la settima diminuita e la triade aumentata. L'accordo di settima diminuita, con la sua struttura simmetrica $\{0, 3, 6, 9\}$, permette ambiguità tonali e modulazioni enharmoniche che i compositori romantici sfruttarono ampiamente.

Wagner e la dissoluzione della tonalità funzionale

Richard Wagner (1813-1883) rappresenta una figura cruciale nel processo che portò alla dissoluzione del sistema tonale tradizionale. Il suo linguaggio armonico, specialmente nelle opere tarde come *Tristano e Isotta* (1859) e *Parsifal* (1882), è caratterizzato da un cromatismo così pervasivo e da progressioni armoniche così ambigue che il senso tradizionale di tonalità viene costantemente destabilizzato.

Il famoso "accordo di Tristano", che apre il preludio dell'opera, è diventato emblematico di questa ambiguità armonica. La successione di accordi nella prima frase del preludio può essere analizzata in termini di trasformazioni che non rispettano le funzioni armoniche tradizionali, ma creano invece relazioni basate su voice-leading parsimonioso e su simmetrie intervallari.

L'accordo di Tristano stesso può essere analizzato come un accordo di settima di sensibile (mezzo diminuita) con note alterate. La sua struttura intervallare e la sua tendenza a risolversi in modi multipli creano un'instabilità che Wagner sfrutta per ritardare indefinitamente la risoluzione cadenzale. Dal punto di vista trasformatore, gli accordi del preludio sono collegati da trasformazioni che minimizzano il movimento delle voci individuali, creando una progressione che ha coerenza voice-leading anche quando la logica armonica funzionale è oscurata.

Hugo Riemann, teorico musicale tedesco contemporaneo di Wagner, sviluppò una teoria delle trasformazioni armoniche (le Riemann-Transformationen) che formalizza alcune delle intuizioni implicite nella musica di Wagner. Le trasformazioni di Riemann includono la Parallela (P), che trasforma una triade maggiore nella sua relativa minore o viceversa, la Relative (R), che trasforma una triade nella triade costruita sulla sua medianta, e la

Leading-tone exchange (L), che trasforma una triade mediante scambio cromatico della fondamentale o della quinta.

Queste trasformazioni possono essere combinate per descrivere progressioni armoniche complesse. Per esempio, la progressione da Do maggiore a Mi minore può essere ottenuta mediante la composizione $L \circ P$: prima si applica la Parallela, ottenendo La minore, poi si applica la Leading-tone exchange, ottenendo Mi minore. Le trasformazioni di Riemann formano un gruppo non abeliano che fornisce un framework teorico per analizzare progressioni armoniche che non seguono la logica tonale tradizionale.

Liszt e l'esplorazione sistematica delle simmetrie armoniche

Franz Liszt (1811-1886) fu forse il compositore del diciannovesimo secolo che esplorò più consapevolmente le possibilità delle strutture simmetriche. Diverse sue composizioni tarde, specialmente i pezzi pianistici brevi e le opere sacre, utilizzano scale e accordi simmetrici in modo sistematico.

La scala esatonale, che divide l'ottava in sei toni interi equidistanti, appare frequentemente nella musica tarda di Liszt. Questa scala, con la sua struttura perfettamente simmetrica $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, è invariante sotto trasposizioni per tono intero e sotto particolari inversioni. La mancanza di semitoni e di una gerarchia tonal chiara conferisce alla scala esatonale un carattere vago e sospeso che Liszt utilizzò per creare atmosfere mistiche e ultraterrene.

Nel pezzo per pianoforte "Nuages gris" (Nubi grigie), composto nel 1881, Liszt utilizza estesamente la scala esatonale e crea progressioni armoniche basate su triadi aumentate, sfruttando la loro simmetria per generare ambiguità tonale. La struttura formale del pezzo è notevolmente aperta e asimmetrica, contrastando con le forme chiuse del classicismo, ma il materiale armonico è costruito su simmetrie precise.

La Bagatella senza tonalità (Bagatelle ohne Tonart), composta nel 1885, rappresenta un passo ulteriore verso la dissoluzione della tonalità. Il pezzo evita qualsiasi affermazione chiara di un centro tonale e utilizza progressioni basate su accordi aumentati e diminuiti, sfruttando le loro proprietà di simmetria per creare un tessuto armonico privo di direzione tonale tradizionale.

Rimskij-Korsakov e la sistematizzazione delle scale simmetriche

Nikolaj Rimskij-Korsakov (1844-1908), compositore russo e teorico, contribuì in modo significativo alla comprensione teorica delle scale simmetriche. Nel suo trattato di armonia, Rimskij-Korsakov catalogò sistematicamente le possibili divisioni simmetriche dell'ottava e le scale che ne derivano.

La scala octatonica (o scala diminuita), che alterna semitoni e toni interi secondo il pattern $\{0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10\}$ o $\{0, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11\}$, ha una struttura altamente simmetrica. È invariante sotto trasposizioni per terza minore (T_3 , T_6 , T_9) e sotto particolari inversioni. Esistono soltanto tre scale octatoniche distinte, poiché ogni trasposizione appartiene a una delle tre classi di equivalenza.

Rimskij-Korsakov utilizzò la scala octatonica estensamente nelle sue composizioni, specialmente per rappresentare elementi fantastici, soprannaturali o orientaleggianti. Questa scala divenne un elemento caratteristico della scuola russa e influenzò profondamente compositori successivi come Igor' Stravinskij, Sergej Rachmaninov e Aleksandr Skrjabin.

La sistematizzazione teorica di Rimskij-Korsakov include anche l'analisi di altre scale simmetriche, come la scala esatonale (già utilizzata da Liszt) e varie scale pentatoniche. Questa catalogazione sistematica delle possibilità scalari può essere interpretata retrospettivamente come un'esplorazione dei sottogruppi del gruppo diedrale D_{12} e delle strutture invarianti sotto questi sottogruppi.

Debussy e l'emancipazione della dissonanza attraverso la simmetria

Claude Debussy (1862-1918) rappresenta una figura di transizione cruciale tra il tardo romanticismo e le avanguardie del ventesimo secolo. La sua musica, pur mantenendo spesso una connessione con la tonalità, la trasforma radicalmente attraverso l'uso sistematico di scale simmetriche, accordi paralleli, e progressioni che evitano le relazioni funzionali tradizionali.

L'utilizzo della scala esatonale in Debussy è particolarmente significativo. In numerosi preludi per pianoforte, come "Voiles" (Vele), interi passaggi sono costruiti esclusivamente sulla scala esatonale. La simmetria della scala elimina la distinzione tra tensione e risoluzione tipica della tonalità funzionale, creando un continuum sonoro dove tutti gli intervalli sono egualmente consonanti o dissonanti.

Nel preludio "Canope", Debussy costruisce progressioni armoniche basate su trasposizioni sistematiche di accordi simmetrici. La progressione sfrutta trasposizioni per terza maggiore e per tritono, intervalli che dividono l'ottava in parti uguali. Questo crea una sensazione di rotazione attraverso uno spazio armonico ciclico piuttosto che di progressione verso una meta tonale.

La tecnica del parallelismo armonico, caratteristica dello stile di Debussy, può essere interpretata trasformazionalmente come l'applicazione della stessa trasposizione simultaneamente a tutte le note di un accordo. Quando Debussy muove accordi di nona dominante in movimento parallelo, sta applicando ripetutamente una trasposizione (tipicamente T_2 o T_1) all'intero accordo, violando le regole tradizionali del voice-leading ma creando effetti sonori distintivi basati sulla preservazione della struttura intervallare interna dell'accordo.

Skrjabin e la simmetria mistica

Aleksandr Skrjabin (1872-1915) sviluppò un sistema compositivo altamente personale basato su un accordo simmetrico chiamato "accordo mistico" o "accordo sintetico". Questo accordo, nella sua forma più comune $\{0, 6, 10, 16, 21, 26\}$ (riducendo all'interno di due ottave), può essere interpretato come una sovrapposizione di quarte (Do, Fa diesis, Si bemolle, Mi, La, Re).

La struttura dell'accordo mistico non è perfettamente simmetrica in senso matematico rigoroso, ma possiede proprietà di quasi-simmetria che Skrjabin sfruttò sistematicamente. Il

compositore utilizzava trasposizioni dell'accordo mistico come base armonica per intere composizioni, trattando le sue trasposizioni come funzioni armoniche in un sistema post-tonale.

Nelle sonate tarde, specialmente la Sonata n. 7 op. 64 "Messa bianca" e la Sonata n. 9 op. 68 "Messa nera", Skrjabin costruisce progressioni basate su trasposizioni dell'accordo mistico che esplorano sistematicamente lo spazio cromatico. Queste trasposizioni seguono spesso pattern simmetrici, riflettendo la visione mistica di Skrjabin dell'ordine cosmico.

La teoria di Skrjabin collegava le trasposizioni dell'accordo mistico a colori specifici e a significati simbolici. Sebbene questa sincretesia sinestetica sia altamente personale e non matematicamente rigorosa, riflette un'intuizione profonda del fatto che le trasposizioni preservano la struttura intervallare mentre modificano l'altezza assoluta, analogamente a come diverse lunghezze d'onda della luce preservano la natura ondulatoria del fenomeno luminoso mentre modificano il colore percepito.

Ravel e il virtuosismo trasformatore

Maurice Ravel (1875-1937) dimostrò una maestria tecnica straordinaria nell'utilizzo delle trasformazioni musicali. Le sue composizioni spesso esibiscono una precisione quasi matematica nella manipolazione del materiale tematico attraverso trasposizioni, inversioni, e altre trasformazioni.

Il "Boléro", sebbene costruito su una ripetizione ostinata di un tema invariante, esplora sistematicamente lo spazio timbrico attraverso orchestrazione progressivamente più densa. Dal punto di vista trasformatore, il pezzo può essere interpretato come un'esplorazione delle trasformazioni nel dominio del timbro piuttosto che dell'altezza o del tempo, mantenendo invariante la struttura melodica e ritmica.

Nel "Trio per pianoforte, violino e violoncello", il movimento finale (Passacaglia) utilizza un tema che viene sottoposto a trasposizioni sistematiche attraverso il circolo delle quinte. Ravel costruisce variazioni che esplorano inversioni e retrogradazioni del tema, integrando queste trasformazioni in una struttura formale coerente.

La suite pianistica "Miroirs" contiene movimenti che utilizzano simmetrie speculative. "La vallée des cloches" (La valle delle campane) crea effetti di eco e riflessione sonora attraverso ripetizioni trasposte e invertite di frammenti melodici, suggerendo riflessioni acustiche nello spazio. Questo uso metaforico delle trasformazioni musicali per evocare fenomeni fisici dimostra come le strutture matematiche possano servire scopi espressivi concreti.

Bartók e l'esplorazione etnofonologica delle simmetrie

Béla Bartók (1881-1945) combinò un interesse profondo per la musica folklorica dell'Europa orientale con una comprensione sofisticata delle possibilità simmetriche del sistema cromatico. La sua musica integra elementi modal derivati dal folklore con tecniche compositive moderniste basate su simmetrie intervallari.

Il concetto di "asse di simmetria" è centrale nell'approccio compositivo di Bartók. In molte sue composizioni, particolari classi di altezza funzionano come assi attorno ai quali il materiale melodico e armonico è organizzato simmetricamente. Per esempio, un passaggio potrebbe essere costruito in modo tale che intervalli ascendenti da un asse centrale siano bilanciati da intervalli discendenti corrispondenti, creando una simmetria speculare.

Nella "Musica per archi, percussioni e celesta", il movimento iniziale (Andante tranquillo) è una fuga il cui soggetto è costruito su una serie di quinte discendenti. Le entrate del soggetto seguono un pattern simmetrico nel circolo delle quinte: La, Re e Sol (quinte discendenti) alternano con Mi, Si, e Fa diesis (quinte ascendenti), creando una simmetria attorno all'asse La-Mi bemolle. Il punto culminante della fuga si raggiunge quando le due direzioni convergono su Mi bemolle, l'estremo opposto del circolo delle quinte rispetto al La iniziale.

Il Quarto Quartetto per archi esibisce una struttura palindroma a cinque movimenti: Allegro - Prestissimo con sordino - Non troppo lento - Prestissimo con sordino - Allegro. Il primo movimento e il quinto sono correlati tematicamente e formalmente, così come il secondo e il quarto, mentre il terzo movimento centrale costituisce il fulcro simmetrico dell'intera composizione. Questa architettura ad arco riflette su larga scala il principio di simmetria che pervade anche i dettagli della costruzione motivica e armonica.

Bartók utilizzò sistematicamente la scala octatonica e altre collezioni simmetriche. La sua analisi della musica folklorica ungherese e rumena lo aveva reso consapevole di scale modali che possiedono proprietà di simmetria, e trasferì questa consapevolezza nella sua musica d'arte, creando un ponte tra tradizione folklorica e modernismo musicale.

Arnold Schönberg e la rivoluzione dodecafonica

La crisi della tonalità e la ricerca di nuovi principi organizzativi

Arnold Schönberg (1874-1951) è la figura centrale nella transizione dalla tonalità espansa tardo-romantica all'atonalità libera e, infine, al metodo dodecafonico. Il suo percorso compositivo riflette la necessità storica di trovare nuovi principi organizzativi quando il sistema tonale tradizionale, eroso dal cromatismo sempre più pervasivo, non poteva più fornire la coerenza strutturale necessaria per sostenere composizioni di grande respiro.

Le prime composizioni di Schönberg, come "Verklärte Nacht" (Notte trasfigurata, 1899), si collocano ancora nell'ambito del tardo romanticismo cromatico, vicine allo stile di Wagner e Richard Strauss. Tuttavia, già in queste opere si manifesta una tendenza a sfruttare progressioni armoniche ambigue e a evitare cadenze tradizionali, prefigurando sviluppi futuri.

Il passaggio decisivo verso l'atonalità avviene nel periodo 1908-1913, con opere come il Secondo Quartetto per archi op. 10 (che nel quarto movimento abbandona l'indicazione di tonalità), le Tre Pezzi per pianoforte op. 11, i Cinque Pezzi per orchestra op. 16, e il monodramma "Erwartung" (Attesa) op. 17. In queste composizioni, Schönberg elimina sistematicamente qualsiasi riferimento a un centro tonale tradizionale, creando un tessuto armonico dove tutte le dodici classi di altezza hanno pari dignità e importanza.

Questo periodo atonale libero, sebbene produttivo di opere di grande intensità espressiva, pose Schönberg di fronte a un problema compositivo fondamentale: come garantire coerenza e unità in assenza dei principi organizzativi forniti dalla tonalità? Le composizioni di questo periodo tendono a essere brevi e aforistiche, poiché la coerenza è ottenuta principalmente attraverso l'intensità espressiva e la concentrazione motivica piuttosto che attraverso strutture formali estese.

Il metodo dodecafonico: simmetria come principio costruttivo

La soluzione che Schönberg elaborò nel corso degli anni Venti fu il "metodo di composizione con dodici note correlate soltanto tra loro", comunemente chiamato metodo dodecafonico o serialismo. Il principio fondamentale consiste nell'organizzare le dodici classi di altezza cromatiche in una sequenza ordinata chiamata serie o Reihe, che fornisce il materiale basilare dell'intera composizione.

La serie dodecafonica originale (O, Original) può essere trasformata mediante tre operazioni fondamentali: la retrogradazione (R, Retrograde), che inverte l'ordine delle note; l'inversione (I, Inversion), che riflette gli intervalli rispetto a un asse; e la combinazione di inversione e retrogradazione (RI, Retrograde-Inversion). Ciascuna di queste quattro forme può essere trasposta a partire da qualsiasi delle dodici classi di altezza, generando un totale di quarantotto forme distinte della serie ($12 \times 4 = 48$).

Questo insieme di quarantotto forme costituisce matematicamente un gruppo, precisamente il prodotto diretto del gruppo ciclico Z_{12} (le dodici trasposizioni) con il gruppo di Klein $V_4 = \{e, R, I, RI\}$. La struttura di gruppo garantisce che la composizione di qualsiasi due trasformazioni produce ancora una trasformazione appartenente al gruppo. Per esempio, la retrogradazione della retrogradazione restituisce la forma originale: $R \circ R = O$. L'inversione dell'inversione restituisce la forma originale trasposta: $I_n \circ I_m = T_{(n-m)}$. La retrogradazione e la trasposizione commutano: $R \circ T_n = T_n \circ R$.

Schönberg articolò i principi del metodo dodecafonico in modo completo per la prima volta nella Suite per pianoforte op. 25 (1921-1923), sebbene sperimentazioni con ordinamenti seriali siano presenti in opere precedenti. La serie di questa composizione è $\{E, F, G, D \flat, G \flat, E \flat, A \flat, D, B, C, A, B \flat\}$, che in notazione numerica (dove $E=4$) diventa $\{4, 5, 7, 1, 6, 3, 8, 2, 11, 0, 9, 10\}$.

Un aspetto cruciale del metodo dodecafonico è che le regole fondamentali preservano le proprietà intervallari della serie. La retrogradazione inverte l'ordine ma preserva gli intervalli tra note adiacenti (leggendoli al contrario). L'inversione riflette gli intervalli mantenendo le loro dimensioni ma cambiando la direzione. Queste trasformazioni preservano quindi l'"identità" della serie permettendo simultaneamente varietà.

Proprietà matematiche delle serie dodecafoniche

La scelta di una particolare serie dodecafonica ha conseguenze strutturali profonde per l'intera composizione. Serie diverse possiedono proprietà simmetriche diverse che influenzano le possibilità combinatorie e le relazioni tra le diverse forme della serie.

Una proprietà importante è la presenza di segmenti simmetrici all'interno della serie. Una serie è palindroma se coincide con la sua retrogradazione: $O = R$. Questo è possibile solo se la serie è strutturata in modo tale che la prima nota corrisponda all'ultima, la seconda alla penultima, e così via. Serie palindrome hanno proprietà speciali: il numero di forme distinte si riduce da quarantotto a ventiquattro, poiché ogni forma retrograda coincide con una trasposizione della forma originale.

Analogamente, una serie può essere tale che una sua inversione coincida con una sua trasposizione: $I_n = T_m$ per qualche scelta di n e m . Serie con queste proprietà di auto-inversione hanno anch'esse meno di quarantotto forme distinte. L'analisi delle simmetrie interne di una serie è quindi cruciale per comprendere la struttura dell'opera che su essa si basa.

Schönberg era consapevole di queste proprietà e spesso sceglieva serie con particolari simmetrie. La serie utilizzata nel Concerto per violino op. 36 ha la proprietà che l'inversione a partire da certe note produce trasposizioni della serie originale, riducendo il numero di forme distinte e creando relazioni più strette tra diverse sezioni della composizione.

Un altro aspetto rilevante riguarda la struttura intervallare della serie. Schönberg tendeva a costruire serie dove l'invarianza sotto particolari trasformazioni crea collegamenti motivici. Per esempio, se i primi tre intervalli di una serie sono $\{+1, +2, +3\}$ (semitono, tono, terza minore ascendenti), l'inversione produrrà $\{-1, -2, -3\}$ (gli stessi intervalli discendenti), creando un'eco motivica riconoscibile.

La teoria matematica delle serie dodecafoniche è stata sviluppata estesamente nel ventesimo secolo. Milton Babbitt, compositore e teorico americano, applicò tecniche algebriche avanzate per classificare le serie in classi di equivalenza secondo le loro proprietà trasformazionali. Due serie appartengono alla stessa classe se esiste una trasformazione del gruppo $\{O, R, I, RI\} \times Z_{12}$ che mappa una nell'altra.

Analisi di opere dodecafoniche di Schönberg

Esaminiamo in dettaglio alcune composizioni dodecafoniche mature di Schönberg per comprendere come il metodo teorico si traduce in pratica compositiva concreta.

Il Quartetto per archi n. 4 op. 37 (1936) è basato su una serie che possiede notevoli proprietà simmetriche. La serie è $\{D, C\sharp, A, B\flat, F, E\flat, E, C, G\sharp, G, F\sharp, B\}$, ovvero $\{2, 1, 9, 10, 5, 3, 4, 0, 8, 7, 6, 11\}$ in notazione numerica. Analizzando questa serie, si scopre che può essere divisa in segmenti che sono correlati per inversione: il secondo esacordo è l'inversione retrograda del primo esacordo rispetto a un asse specifico.

Questa proprietà permette a Schönberg di creare relazioni intricate tra diverse forme della serie. Quando il compositore utilizza simultaneamente la forma originale e una forma inversa, segmenti della forma inversa possono coincidere con segmenti della forma originale letti in ordine diverso, creando una rete di corrispondenze motiviche che fornisce coerenza pur nella varietà del materiale superficiale.

Il primo movimento del quartetto è in forma-sonata, dimostrando che Schönberg concepiva il metodo dodecafonico non come sostituto delle forme classiche ma come un nuovo metodo

per generare il materiale tematico all'interno di quelle forme. L'esposizione presenta due gruppi tematici costruiti su forme diverse della serie. Lo sviluppo esplora combinazioni contrappuntistiche di varie forme, mentre la ripresa riafferma i gruppi tematici in una relazione modificata ma riconoscibile con l'esposizione.

Il Concerto per pianoforte op. 42 (1942), una delle ultime composizioni dodecafoniche di Schönberg, mostra una maestria matura del metodo. La serie è costruita in modo tale da generare triadi e altri accordi tonali quando note adiacenti vengono suonate simultaneamente. Questo non costituisce un ritorno alla tonalità, ma un riconoscimento che gli accordi tradizionali possono essere reintegrati nel linguaggio dodecafonico come eventi sonori senza funzione tonale.

Il concerto utilizza combinazioni complesse di forme della serie. In alcuni passaggi, quattro forme diverse (O, R, I, RI) appaiono simultaneamente nelle quattro parti orchestrali, creando una texture polifonica di straordinaria densità. Tuttavia, Schönberg controlla attentamente il risultato verticale, assicurando che le combinazioni producano strutture armoniche coerenti con il carattere espressivo desiderato.

Alban Berg: lirismo e simmetria numerica

Alban Berg (1885-1935), allievo di Schönberg, sviluppò un approccio personale al metodo dodecafonico che integrava elementi tonali residui e sfruttava proprietà simmetriche speciali delle serie per creare effetti espressivi particolari.

Il Concerto per violino "Alla memoria di un angelo" (1935), l'ultima composizione completa di Berg, è basato su una serie con proprietà straordinarie. La serie {G, B $\flat$, D, F $\sharp$, A, C, E, G $\sharp$, B, C $\sharp$, D $\sharp$, F} contiene nelle prime otto note quattro triadi alternate maggiori e minori: Sol minore, Re maggiore, La minore, Mi maggiore. Questo conferisce alla serie un carattere quasi tonale che Berg sfrutta per creare momenti di reminiscenza tonale all'interno del contesto dodecafonico.

Le ultime quattro note della serie formano una scala per toni interi (Sol diesis, Si, Do diesis, Re diesis, Fa), che Berg utilizza per citare il corale di Bach "Es ist genug" (È abbastanza). Questa citazione, integrata organicamente nella struttura seriale, crea un momento di profonda intensità emotiva e spirituale, dimostrando che il rigore costruttivo del metodo dodecafonico non preclude l'espressività lirica.

L'opera "Lulu", lasciata incompleta alla morte di Berg e completata successivamente da Friedrich Cerha, utilizza un sistema complesso di serie multiple. Diversi personaggi sono associati a serie specifiche, e le trasformazioni delle serie riflettono le relazioni drammatiche tra i personaggi. Per esempio, quando due personaggi interagiscono, le loro serie possono essere combinate contrappuntisticamente, oppure una serie può essere trasformata in un modo che riflette l'influenza di un personaggio sull'altro.

Berg aveva un interesse particolare per le simmetrie numeriche e per la numerologia. Il numero 23 appare ricorrentemente nelle sue composizioni come unità strutturale. Nel Concerto da camera (1925), la struttura formale e la disposizione degli strumenti riflettono proporzioni basate sul 23 e sui suoi multipli. Sebbene queste costruzioni numerologiche

siano in parte oscure e simboliche, riflettono una concezione della composizione come architettura matematica.

Anton Webern: aforisma e simmetria cristallina

Anton Webern (1883-1945), l'altro grande allievo di Schönberg, portò il metodo dodecafonico alle sue estreme conseguenze di concisione e simmetria. Le sue composizioni mature sono caratterizzate da estrema brevità (alcuni movimenti durano meno di un minuto), da textures trasparenti, e da un utilizzo sistematico delle simmetrie seriali.

Webern tendeva a scegliere serie con il massimo grado di simmetria interna. La Sinfonia op. 21 (1928) è basata su una serie che è quasi palindroma e dove l'inversione produce la retrogradazione: $I = R$. Questa proprietà riduce drasticamente il numero di forme distinte della serie, creando una rete estremamente coesa di relazioni motiviche.

La serie della Sinfonia op. 21 è $\{B \flat, B, D, E \flat, G, F\sharp, G\sharp, E, F, C, C\sharp, A\}$, ovvero $\{10, 11, 2, 3, 7, 6, 8, 4, 5, 0, 1, 9\}$. Analizzando la sua struttura, si scopre che è costruita da quattro tricordi che sono trasposizioni e inversioni l'uno dell'altro. Il primo tricordo $\{B \flat, B, D\}$ ha la struttura intervallare $\{+1, +3\}$, il secondo $\{E \flat, G, F\sharp\}$ ha struttura $\{+4, -1\}$ (equivalente a $\{+4, +11\}$), il terzo $\{G\sharp, E, F\}$ ha struttura $\{-4, +1\}$, e il quarto $\{C, C\sharp, A\}$ ha struttura $\{+1, -4\}$.

Questa costruzione modulare permette a Webern di generare l'intera serie mediante trasposizioni e inversioni di un unico tricordo basilare. Il principio di simmetria opera quindi non solo sulla serie completa, ma anche sui suoi segmenti costitutivi, creando una struttura frattale dove la simmetria si manifesta a multiple scale.

Il primo movimento della Sinfonia è un doppio canone, dove due canoni (uno tra violino I e viola, l'altro tra violino II e violoncello) si svolgono simultaneamente utilizzando forme diverse della serie. La struttura canonica crea simmetrie temporali, mentre la costruzione seriale crea simmetrie intervallari. Questi due livelli di simmetria si integrano producendo una texture di straordinaria coerenza e unità organica.

Il secondo movimento è un tema con sette variazioni, ma le variazioni sono costruite in modo palindromo: la struttura complessiva è $A-B-C-D-C'-B'-A'$, dove le variazioni prima della centrale D sono specchiate dalle variazioni dopo D. Questa simmetria macroscopica riflette su larga scala il principio di simmetria che pervade ogni aspetto della composizione.

Webern utilizzò anche la simmetria per organizzare il registro. In molte sue composizioni, note specifiche della serie sono assegnate a registri fissi, creando un "Klangfarbenmelodie" (melodia di timbri) dove il profilo melodico è frammentato tra diversi registri e timbri. Questo trattamento puntillista della melodia può essere interpretato come una distribuzione simmetrica del materiale nello spazio del registro.

Il serialismo integrale: estensione della simmetria ad altri parametri

Gli allievi e i successori di Webern portarono il principio seriale oltre il dominio delle altezze, applicandolo a tutti i parametri musicali: durate, dinamiche, modi d'attacco, timbri. Questo approccio, chiamato serialismo integrale o totale, rappresenta l'estensione massima del principio di simmetria e trasformazione nella composizione musicale.

Olivier Messiaen (1908-1992), sebbene non strettamente un serialista, compose nel 1949-1950 i "Mode de valeurs et d'intensités" per pianoforte, che organizza sistematicamente altezze, durate e dinamiche in serie indipendenti. Questa composizione influenzò profondamente la generazione successiva di compositori seriali.

Pierre Boulez (1925-2016) applicò il principio seriale a tutti i parametri nelle sue "Structures" per due pianoforti (Libro I, 1952). In questa composizione, una serie controlla le altezze, una diversa serie controlla le durate, una terza serie controlla le dinamiche, e una quarta serie controlla i modi d'attacco. Le trasformazioni (trasposizione, retrogradazione, inversione) vengono applicate simultaneamente a tutte le serie.

Dal punto di vista matematico, il serialismo integrale può essere interpretato come l'azione del gruppo delle trasformazioni su uno spazio multidimensionale dove ogni dimensione rappresenta un parametro musicale diverso. Una trasformazione nel gruppo agisce simultaneamente su tutte le dimensioni secondo regole specifiche. Questo crea strutture di enorme complessità dove le simmetrie si manifestano su molteplici livelli simultanei.

Karlheinz Stockhausen (1928-2007), nel "Kreuzspiel" (Gioco di incroci, 1951) e in "Kontra-Punkte" (1952-1953), esplorò sistematicamente le possibilità del serialismo integrale. Stockhausen concepiva le trasformazioni seriali come "formule" che generano l'intera struttura compositiva. Una formula è una configurazione di parametri (altezze, durate, dinamiche) che viene trasformata sistematicamente per generare il materiale dell'intera composizione.

Luigi Nono (1924-1990) applicò tecniche seriali in modo più flessibile, integrando aleatorietà controllata e improvvisazione strutturata. La sua opera "Il canto sospeso" (1955-1956) utilizza serie di altezze derivate dalle lettere del testo (poesie di resistenti condannati a morte durante la Seconda Guerra Mondiale), creando un collegamento simbolico tra struttura musicale e significato extramusicale.

Critiche e limitazioni del serialismo integrale

Il serialismo integrale, nonostante il suo rigore matematico e la sua eleganza concettuale, incontrò critiche significative sia da parte di compositori che di teorici. Una critica fondamentale riguarda la percezione: l'ascoltatore medio non può percepire direttamente le complesse relazioni seriali che strutturano la composizione. Le simmetrie e le trasformazioni operate su parametri come la dinamica o il modo d'attacco sono troppo sottili per essere colte consciamente, rendendo la struttura compositiva opaca all'ascolto.

Questo solleva una questione estetica fondamentale: se la struttura matematica sottostante non è percepibile, in che senso può contribuire al valore estetico della composizione? I difensori del serialismo rispondevano che la struttura, anche se non consciamente percepita, contribuisce comunque alla coerenza organica dell'opera a livello subconscio. Gli oppositori ribattevano che questo costituisce una forma di feticismo strutturale che sacrifica l'esperienza sonora concreta sull'altare dell'astrazione matematica.

Un'altra critica riguarda la natura deterministica del metodo seriale integrale. Quando tutti i parametri sono serializzati, il compositore rinuncia a gran parte del controllo locale sui dettagli sonori, delegando le decisioni compositivi alle trasformazioni algoritmiche della

serie. Questo può produrre risultati sonori che il compositore non avrebbe scelto intenzionalmente, sollevando questioni sull'intenzionalità artistica.

Alcuni compositori, come Iannis Xenakis (1922-2001), criticarono il serialismo per l'incapacità di produrre vere discontinuità e sorprese. Xenakis argomentava che il serialismo, nel suo tentativo di evitare ripetizioni e di massimizzare la varietà, produce paradossalmente una texture uniforme dove tutto suona ugualmente complesso e dove non ci sono veri punti di riferimento o contrasti netti.

Nonostante queste critiche, il serialismo integrale rappresenta un momento cruciale nella storia della musica occidentale, poiché ha spinto alle estreme conseguenze il principio di organizzazione razionale e simmetrica del materiale musicale. Anche i compositori che successivamente abbandonarono il serialismo rigoroso conservarono spesso una sensibilità alle trasformazioni simmetriche derivata dall'esperienza seriale.

Sviluppi teorici contemporanei e conclusioni

La teoria trasformazionale di David Lewin

David Lewin (1933-2003), teorico musicale americano, sviluppò negli anni Ottanta e Novanta del Novecento un framework teorico generale per le trasformazioni musicali che ha profondamente influenzato l'analisi musicale contemporanea. Il suo libro seminale "Generalized Musical Intervals and Transformations" (1987) formalizza matematicamente il concetto di trasformazione musicale utilizzando teoria dei gruppi e teoria delle categorie.

L'approccio di Lewin rovescia la prospettiva tradizionale dell'analisi musicale. Invece di concepire gli oggetti musicali (note, accordi, motivi) come entità primarie e le relazioni tra essi come proprietà secondarie, Lewin propone di considerare le trasformazioni stesse come oggetti matematici primari. La domanda fondamentale non è "quanto distano due accordi?", ma "quale trasformazione mappa un accordo nell'altro?".

Formalmente, Lewin definisce un sistema trasformazionale come una tripla (S, G, act) , dove S è un insieme di oggetti musicali (per esempio, classi di altezza, accordi, o strutture ritmiche), G è un gruppo di trasformazioni, e $\text{act}: G \times S \rightarrow S$ è un'azione di gruppo che specifica come ogni trasformazione g in G agisce su ogni oggetto s in S per produrre un nuovo oggetto $\text{act}(g, s)$.

Questa formalizzazione permette di unificare sotto un framework comune diversi tipi di trasformazioni musicali. Le trasposizioni di classi di altezza, le inversioni, le trasformazioni di Riemann su triadi, le permutazioni di ordini seriali, e molte altre operazioni possono essere tutte interpretate come azioni di gruppi su insiemi appropriati.

Un concetto chiave nella teoria di Lewin è quello di "network trasformazionale", una struttura grafica dove i nodi rappresentano oggetti musicali e gli archi orientati rappresentano trasformazioni. Un network trasformazionale visualizza le relazioni trasformazionali all'interno di un passaggio musicale, permettendo di identificare pattern ricorrenti di trasformazioni che costituiscono elementi strutturali significativi.

Per esempio, un network trasformatore potrebbe mostrare una sequenza di accordi collegati da trasformazioni di Riemann. Se il pattern di trasformazioni (le etichette sugli archi) si ripete in diverse parti della composizione, questo indica una coerenza strutturale profonda che potrebbe non essere evidente dalla superficie sonora. Lewin dimostrò come questa metodologia possa rivelare strutture nascoste in composizioni di Wagner, Debussy, Schönberg, e molti altri compositori.

Le teorie neo-riemanniane e la geometria degli spazi armonici

La teoria neo-riemanniana, sviluppata negli anni Ottanta e Novanta da Richard Cohn, Brian Hyer, e altri, estende e formalizza le intuizioni di Hugo Riemann sulle trasformazioni armoniche. Il gruppo neo-riemanniano PLR è generato da tre trasformazioni fondamentali sulle triadi maggiori e minori:

- P (Parallel): trasforma una triade maggiore nella sua relativa minore o viceversa, preservando quinta e fondamentale ma modificando la terza di un semitono. Per esempio, P trasforma Do maggiore {C, E, G} in Do minore {C, E $\flat$, G}.
- L (Leading-tone exchange): scambia la fondamentale con la nota a distanza di semitono. L trasforma Do maggiore {C, E, G} in Mi minore {E, G, B}.
- R (Relative): trasforma una triade maggiore nella sua relativa minore (o viceversa) preservando la terza e la quinta. R trasforma Do maggiore {C, E, G} in La minore {A, C, E}.

Queste tre trasformazioni generano un gruppo di ventiquattro elementi che permette di connettere qualsiasi triade maggiore o minore a qualsiasi altra mediante una sequenza di trasformazioni P, L, e R. Il gruppo PLR è isomorfo al gruppo diedrale D_{12} , rivelando una connessione profonda tra le simmetrie delle triadi e le simmetrie del poligono dodecagonale.

La teoria neo-riemanniana ha trovato applicazioni particolarmente fruttuose nell'analisi della musica del diciannovesimo secolo, dove progressioni armoniche non-tonali basate su relazioni di terza o mediante possono essere elegantemente descritte come sequenze di trasformazioni PLR. Per esempio, la progressione Do maggiore $\rightarrow$ Mi minore $\rightarrow$ Sol maggiore può essere descritta come $L \circ R$, rivelando la sua struttura trasformatore.

Richard Cohn ha esteso queste idee introducendo il concetto di "parsimonioso voice-leading" (condotta delle voci parsimoniosa), dove triadi sono connesse da trasformazioni che minimizzano il movimento totale delle voci. Le trasformazioni P, L, e R sono tutte massimamente parsimoniose: muovono soltanto una voce di un semitono mentre le altre due rimangono fisse. Questa proprietà conferisce alle progressioni basate su queste trasformazioni un carattere di continuità e smoothness che è percettivamente saliente.

La rappresentazione geometrica di queste relazioni porta al Tonnetz generalizzato, un toroide (superficie a forma di ciambella) dove le ventiquattro triadi maggiori e minori sono disposte in modo tale che triadi adiacenti sono connesse da trasformazioni parsimoniose. Questo spazio geometrico visualizza le relazioni armoniche in modo intuitivo e permette di comprendere progressioni complesse come percorsi attraverso il toroide.

Teoria degli insiemi e la classificazione delle strutture post-tonali

Allen Forte, nel suo libro "The Structure of Atonal Music" (1973), sviluppò una sistematica classificazione delle collezioni di altezze basata sulla teoria dei gruppi. Forte identificò 224 classi di equivalenza distinte sotto trasposizione e inversione per insiemi di cardinalità da 3 a 9 (gli insiemi di cardinalità 1, 2, 10, 11, 12 hanno proprietà banali).

Ogni classe di equivalenza, identificata da un numero Forte nella forma $n-x$ (dove n è la cardinalità e x è un numero progressivo), rappresenta una struttura intervallare distinta che può apparire in molteplici trasposizioni e inversioni. Per esempio, la classe 3-11, costituita dagli insiemi della forma $\{0, 3, 7\}$, rappresenta la triade minore in tutte le sue trasposizioni e inversioni.

Forte introdusse anche il concetto di "vettore intervallare", una rappresentazione compatta della struttura intervallare di un insieme. Il vettore intervallare è una sestupla $[c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6]$ dove c_i indica quante coppie di note dell'insieme sono separate dall'intervallo i (con i che varia da 1 a 6 semitoni, dove 6 rappresenta il tritono). Due insiemi appartengono alla stessa classe di equivalenza se e solo se hanno lo stesso vettore intervallare (con alcune eccezioni dovute agli insiemi Z-related).

Questa classificazione ha permesso agli analisti di identificare relazioni strutturali profonde in musica atonale. Compositori come Schönberg, Webern, e successivamente Elliott Carter e Milton Babbitt, utilizzarono consapevolmente particolari classi di insiemi per le loro proprietà simmetriche o per le loro relazioni di complementarità.

La relazione di complementarità è particolarmente importante: due insiemi sono complementari se la loro unione produce la scala cromatica completa. Insiemi complementari hanno vettori intervallari complementari, e questa relazione crea possibilità compositive interessanti. Per esempio, se un compositore utilizza un esacordo (insieme di sei note) come materiale principale, il suo complemento (le altre sei note) può fornire materiale contrastante ma strutturalmente correlato.

Applicazioni computazionali e composizione algoritmica

Lo sviluppo dei computer nel ventesimo secolo ha aperto nuove possibilità per l'esplorazione sistematica delle trasformazioni musicali. La composizione algoritmica, dove algoritmi matematici generano materiale musicale, spesso sfrutta le proprietà dei gruppi di trasformazioni.

Iannis Xenakis sviluppò programmi computazionali che utilizzano processi stocastici (probabilistici) per generare strutture musicali. Sebbene l'approccio di Xenakis fosse principalmente basato su probabilità piuttosto che su trasformazioni deterministiche, incorporava comunque principi di simmetria e invarianza statistica.

La composizione frazale, sviluppata negli anni Settanta e Ottanta, sfrutta simmetrie auto-similari dove strutture musicali sono ripetute a diverse scale temporali. Un motivo può essere trasformato mediante dilatazione temporale (moltiplicazione di tutte le durate per un fattore costante) e applicato ricorsivamente, creando strutture che manifestano simmetria

attraverso scale. Questo tipo di autosimilarità può essere interpretato come azione di un gruppo di trasformazioni che include dilatazioni oltre a trasposizioni e inversioni.

I sistemi di riscrittura (rewriting systems), come i L-systems utilizzati originariamente per modellare la crescita delle piante, sono stati adattati per generare musica. Questi sistemi applicano regole di trasformazione ricorsivamente a simboli musicali, generando strutture complesse da regole semplici. Le regole di trasformazione possono incorporare simmetrie specifiche, garantendo che la musica generata preservi particolari proprietà strutturali.

La teoria dell'informazione algoritmica fornisce metriche per quantificare la complessità di strutture musicali. Una struttura altamente simmetrica ha tipicamente bassa complessità di Kolmogorov, poiché può essere descritta concisamente mediante le sue simmetrie piuttosto che enumerando tutti i suoi elementi. Questa prospettiva suggerisce che la simmetria in musica può essere interpretata come una forma di compressione dell'informazione, dove pattern complessi sono generati da principi generativi semplici.

Teoria della Gestalt e percezione delle simmetrie musicali

La psicologia della Gestalt, sviluppata nel ventesimo secolo, ha fornito framework teorici per comprendere come gli ascoltatori percepiscono e organizzano le strutture musicali. I principi gestaltici di raggruppamento (prossimità, similarità, continuità, chiusura) influenzano profondamente la percezione delle trasformazioni musicali.

Una sequenza di note è percepita come una unità coerente (una "figura" gestaltiana) se le note sono raggruppate per prossimità temporale, similarità di registro, o continuità melodica. Quando questa figura viene trasformata mediante trasposizione o inversione, l'ascoltatore può riconoscere la relazione trasformativa se la trasformazione preserva le proprietà gestaltiche che definiscono la figura.

Esperimenti psicoacustici hanno dimostrato che gli ascoltatori possono riconoscere melodie trasposte con grande facilità, anche senza training musicale formale. Questo suggerisce che la rappresentazione mentale delle melodie è basata su relazioni intervallari relative piuttosto che su altezze assolute, una proprietà di invarianza sotto trasposizione.

Il riconoscimento di inversioni è più difficile per la maggior parte degli ascoltatori, suggerendo che l'inversione non preserva tutte le proprietà percettivamente salienti di una melodia. In particolare, l'inversione cambia il profilo di contorno melodico (la sequenza di movimenti ascendenti e discendenti), che è un aspetto percettivamente importante dell'identità melodica.

La retrogradazione è ancora più difficile da riconoscere, poiché inverte la dimensione temporale. La maggior parte degli ascoltatori non riesce a identificare consapevolmente che una melodia è la retrogradazione di un'altra, sebbene alcune proprietà statistiche (come la distribuzione delle altezze) rimangano invarianti. Questo solleva questioni sull'efficacia compositiva della retrogradazione: se gli ascoltatori non possono percepirla, quale ruolo strutturale può giocare?

Una risposta è che la retrogradazione, anche se non consciamente percepita, contribuisce alla coerenza strutturale a un livello più profondo. Inoltre, in contesti specifici (per esempio,

quando la retrogradazione è presentata immediatamente dopo la forma originale), gli ascoltatori possono percepire una relazione di simmetria temporale anche senza identificare esplicitamente la trasformazione.

Simmetria e bellezza: considerazioni estetiche

La relazione tra simmetria e bellezza è stata oggetto di riflessione filosofica fin dall'antichità. Nella tradizione pitagorica e platonica, la simmetria era considerata manifestazione di ordine razionale e armonia cosmica, quindi intrinsecamente bella. Questa concezione ha influenzato profondamente l'estetica musicale, specialmente nelle epoche dove la musica era concepita come riflesso di proporzioni matematiche divine.

Tuttavia, l'estetica moderna ha sviluppato concezioni più complesse della relazione tra simmetria e bellezza. Troppa simmetria può risultare monotona e prevedibile, mentre asimmetria totale può apparire caotica e incoerente. L'arte più apprezzata spesso manifesta un equilibrio tra simmetria e asimmetria, tra ordine e varietà, tra attesa e sorpresa.

In musica, questo equilibrio si manifesta nell'uso selettivo delle trasformazioni. Un compositore può utilizzare trasposizioni per creare coerenza tematica, ma variare altri parametri (ritmo, dinamica, orchestrazione) per mantenere interesse. Inversioni e retrogradazioni possono fornire varietà pur mantenendo connessioni motiviche riconoscibili.

La teoria dell'informazione estetica, sviluppata da Abraham Moles e altri, propone che l'esperienza estetica ottimale si verifica quando c'è un equilibrio tra informazione e ridondanza. Troppa ridondanza (corrispondente a simmetria eccessiva) è noiosa; troppa informazione (asimmetria totale) è incomprensibile. La simmetria musicale contribuisce alla ridondanza necessaria per rendere la musica comprensibile, mentre le deviazioni dalla simmetria perfetta forniscono l'informazione necessaria per mantenere interesse.

Limiti della metafora matematica

È importante riconoscere i limiti dell'applicazione della matematica alla musica. La teoria dei gruppi fornisce strumenti potenti per descrivere e analizzare trasformazioni musicali, ma non cattura tutti gli aspetti rilevanti dell'esperienza musicale.

La qualità timbrica, per esempio, non è facilmente modellabile mediante gruppi di trasformazioni. Due note con la stessa altezza ma suonate da strumenti diversi appartengono alla stessa classe di altezza dal punto di vista della teoria dei gruppi, ma hanno qualità sonore drammaticamente diverse che sono cruciali per l'esperienza musicale.

Il ritmo e il metro, sebbene possano essere modellati matematicamente, non sono facilmente integrabili nel framework della teoria dei gruppi applicata alle altezze. Le trasformazioni ritmiche (aumentazione, diminuzione, retrogradazione) operano su un dominio diverso dalle trasformazioni di altezza, e le relazioni tra i due domini non sono catturate adeguatamente dai modelli matematici standard.

L'espressione musicale, che include aspetti come il rubato, le sfumature dinamiche, le variazioni agogiche, è essenzialmente continua e sfugge alla discretizzazione necessaria per modelli matematici basati su insiemi finiti e gruppi discreti. Un'esecuzione espressiva di

una melodia può trasformare radicalmente il suo carattere senza modificare le classi di altezza o le durate nominali.

Inoltre, il significato musicale non è riducibile a strutture matematiche. Una progressione armonica può avere implicazioni emotive, culturali, o simboliche che dipendono dal contesto storico, culturale, e compositivo, e che non sono catturate dalla sua descrizione puramente trasformativa.

Sintesi: dalle simmetrie di Bach alle trasformazioni di Schönberg

Ricapitolando il percorso storico tracciato in questo saggio, possiamo osservare una continuità profonda nell'utilizzo delle trasformazioni musicali da Bach a Schönberg, nonostante le radicali differenze stilistiche e estetiche che separano questi compositori.

In Bach, le trasformazioni (trasposizione, inversione, retrogradazione) operano all'interno del sistema tonale, fornendo varietà contrappuntistica mantenendo la coerenza armonica del sistema maggiore-minore. Il contrappunto invertibile, i canoni, le fughe con inversione del soggetto: tutte queste tecniche sfruttano proprietà trasformativa per generare ricchezza testurale da materiale tematico economico.

Il periodo classico-romantico vede un relativo declino dell'interesse per le trasformazioni contrappuntistiche rigorose, con maggiore enfasi sulla simmetria formale su larga scala. Tuttavia, compositori come Beethoven nelle opere tarde e i romantici tardivi come Liszt iniziano a esplorare simmetrie armoniche che trascendono il sistema tonale tradizionale.

Con Wagner e i post-romantici, il cromatismo pervasivo inizia a erodere le fondamenta del sistema tonale, creando la necessità di nuovi principi organizzativi. Le simmetrie intervallari (scale esatonali, octatoniche, accordi aumentati e diminuiti) diventano sempre più importanti come strutture portanti in assenza di progressioni tonali funzionali.

Schönberg rappresenta il culmine di questo processo: il metodo dodecafonico cristallizza l'intuizione che le trasformazioni stesse possono fornire la coerenza strutturale necessaria per composizioni estese in assenza di tonalità. Le quarantotto forme della serie dodecafonica, generate dalle trasposizioni e dalle quattro operazioni fondamentali {O, R, I, RI}, costituiscono un gruppo matematico che fornisce il materiale compositivo per l'intera opera.

Il serialismo integrale di Webern, Boulez, e Stockhausen porta questo principio alle sue estreme conseguenze, applicando trasformazioni seriali a tutti i parametri musicali. Sebbene questo movimento abbia incontrato resistenze e critiche, ha permanentemente arricchito la consapevolezza compositiva delle possibilità trasformativa.

Eredità contemporanea e prospettive future

L'eredità dell'approccio trasformativa alla composizione persiste nella musica contemporanea, anche tra compositori che hanno abbandonato il serialismo rigoroso. La consapevolezza delle possibilità simmetriche, delle relazioni trasformativa tra materiali musicali, e dei principi di invarianza sotto trasformazione continua a influenzare il pensiero compositivo.

Compositori come Elliott Carter, György Ligeti, e Kaija Saariaho hanno sviluppato linguaggi compositivi personali che integrano aspetti del pensiero trasformatore senza aderire a sistemi seriali rigidi. La musica spettrale francese, sviluppata da Gérard Grisey e Tristan Murail, applica principi trasformativi nel dominio dello spettro armonico piuttosto che delle altezze discrete.

La tecnologia digitale ha aperto nuove possibilità per l'esplorazione delle trasformazioni musicali. Software di composizione assistita da computer permette di applicare trasformazioni complesse a materiali musicali, esplorare sistematicamente spazi trasformativi, e visualizzare relazioni strutturali in modi precedentemente impossibili.

La teoria matematica continua a evolversi, con nuove applicazioni di algebra astratta, topologia, e teoria delle categorie all'analisi musicale. Questi sviluppi promettono di approfondire ulteriormente la nostra comprensione delle strutture profonde che sottendono la musica.

Tuttavia, è essenziale mantenere un equilibrio tra rigore analitico e sensibilità musicale. La matematica fornisce strumenti potenti per descrivere e comprendere aspetti della struttura musicale, ma la musica rimane fondamentalmente un'arte del suono organizzato nel tempo, il cui valore ultimo risiede nell'esperienza estetica che produce piuttosto che nelle sue proprietà matematiche astratte.

Conclusione: la dialettica tra libertà e struttura

La storia dell'applicazione delle trasformazioni simmetriche in musica, da Bach a Schönberg e oltre, rivela una dialettica fondamentale tra libertà creativa e necessità strutturale. Le trasformazioni matematiche forniscono vincoli che limitano le scelte compositive, ma è precisamente attraverso questi vincoli che emerge la possibilità di creare strutture coerenti e significative.

Bach dimostrava che il rigore contrappuntistico, lungi dal limitare l'espressività, può generare musica di profonda intensità emotiva e spirituale. Le complesse fughe dell'Arte della Fuga sono simultaneamente costruzioni matematiche rigorose e opere d'arte commoventi. Il vincolo trasformatore non soffoca la creatività, ma la canalizza e la focalizza.

Schönberg, affrontando la dissoluzione del sistema tonale, riconobbe la necessità di nuovi vincoli per sostituire quelli forniti dalla tonalità funzionale. Il metodo dodecafonico, con le sue regole precise sulle trasformazioni permesse della serie, fornisce questi vincoli. I compositori seriali successivi spinsero questo principio alle estreme conseguenze, ma anche nei casi di massimo rigore seriale, lo spazio delle possibilità compositive rimaneva vasto. La teoria matematica dei gruppi fornisce il linguaggio formale per comprendere le proprietà strutturali delle trasformazioni musicali. Concetti come invarianza, simmetria, classe di equivalenza, gruppo diedrale, illuminano aspetti della struttura musicale che altrimenti rimarrebbero impliciti. Questa comprensione teorica può informare e arricchire sia la pratica compositiva che l'analisi musicale.

Tuttavia, la matematica non esaurisce il fenomeno musicale. La musica è esperienza sonora temporale, è gesto espressivo, è comunicazione emotiva, è pratica culturale. Le

trasformazioni simmetriche sono strumenti al servizio di questi scopi più ampi, non fini in se stesse.

Il valore duraturo dell'eredità che da Bach giunge fino a Schönberg e oltre non risiede nelle specifiche tecniche compositive utilizzate, che variano enormemente tra periodi ed stili, ma nel principio metodologico che le unifica: l'idea che la coerenza musicale possa essere ottenuta attraverso l'applicazione sistematica di trasformazioni a materiale basilare, generando unità nella varietà, familiarità nella novità, ordine nella complessità. Questo principio, formalizzato matematicamente mediante la teoria dei gruppi, rappresenta un contributo permanente alla comprensione di come la mente umana organizza strutture complesse, musicali e non. La simmetria, in tutte le sue manifestazioni, è principio fondamentale di organizzazione cognitiva, e la musica offre un dominio privilegiato per esplorare le sue potenzialità.

Il futuro della musica, quale che sia la direzione che prenderà, continuerà probabilmente a confrontarsi con questi temi. Nuove tecnologie, nuovi sistemi di temperamento, nuove concezioni del suono: tutti questi sviluppi dovranno affrontare la questione fondamentale di come organizzare il materiale sonoro in strutture coerenti e significative. Le trasformazioni simmetriche, con la loro eleganza matematica e la loro efficacia compositiva, rimarranno strumenti preziosi in questo processo creativo continuo. La tradizione che da Bach conduce a Schönberg ci insegna che la musica può essere simultaneamente espressione spontanea dell'anima e costruzione architettonica rigorosa, improvvisazione libera e calcolo preciso, ispirazione divina e artificio umano. Le trasformazioni simmetriche, studiate attraverso il prisma della teoria dei gruppi, costituiscono uno dei fili che connettono questi apparenti opposti in una sintesi produttiva e feconda che continua a nutrire la creatività musicale.

Bibliografia essenziale

Fonti teoriche classiche:

Forte, Allen. *The Structure of Atonal Music*. Yale University Press, 1973.

Lewin, David. *Generalized Musical Intervals and Transformations*. Yale University Press, 1987.

Riemann, Hugo. *Handbuch der Harmonielehre*. Breitkopf & Härtel, 1887.

Studi sulla musica di Bach:

Wolff, Christoph. *Johann Sebastian Bach: The Learned Musician*. W. W. Norton, 2000.

Williams, Peter. *The Chromatic Fourth During Four Centuries of Music*. Oxford University Press, 1997.

Studi su Schönberg e la Seconda Scuola di Vienna:

Babbitt, Milton. *The Collected Essays of Milton Babbitt*. Princeton University Press, 2003.

Haimo, Ethan. *Schoenberg's Serial Odyssey: The Evolution of his Twelve-Tone Method, 1914-1928*. Oxford University Press, 1990.

Teoria trasformatzionale contemporanea:

Cohn, Richard. *Audacious Euphony: Chromatic Harmony and the Triad's Second Nature*. Oxford University Press, 2012.

Rings, Steven. *Tonality and Transformation*. Oxford University Press, 2011.

Applicazioni matematiche:

Mazzola, Guerino. *The Topos of Music: Geometric Logic of Concepts, Theory, and Performance*. Birkhäuser, 2002.

Tymoczko, Dmitri. *A Geometry of Music: Harmony and Counterpoint in the Extended Common Practice*. Oxford University Press, 2011.